Bessel function:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0 \rightarrow (1)$$

the sol^n of eq^n

$$J_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k}}{r!\, \Gamma(r+k+1)} \rightarrow (2)$$

في هذا الجزء ندرس كيفية حلول المعادلة رقم ① بمجرد النظر حيث ينتج من حلها بالمتسلسلات الصورة ②

وعند حل معادلة على الصورة ① نوجد جذر الرقم k إذا كان

If $k_1 - k_2$ non Integer

$$y_{G.S} = c_1 J_k(x) + c_2 J_{-k}(x)$$

If $k_1 - k_2$ integer

$$y_{G.S} = c_1 J_k(x) + c_2 Y_k(x)$$

$$Y_k = \lim_{n \to k} \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}}{\sin n\pi}$$

Ex Solve by Series Solution

① $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{16}{25}\right) y = 0$

② $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 9) y = 0$

[1] $k^2 = \frac{16}{25}$ $\qquad k = \pm \frac{4}{5}$

$k_1 - k_2 = \frac{4}{5} - \frac{-4}{5} = \frac{8}{5}$ non Integer

and equation is Bessel equation

$$y_{G.S} = c_1 J_{\frac{4}{5}} + c_2 J_{-\frac{4}{5}}(x)$$

Page :
Date :

$$J_{\frac{4}{5}}(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{4}{5}}}{r!\ \Gamma\left(r+\frac{9}{5}\right)}$$

(2) the eq is Bessel

$k_1 = 3,\quad k_2 = -3 \quad \rightarrow k_1 - k_2 = 6$ integer

$$y_{G.S} = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$$

$$J_3(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+3}}{r!\ \Gamma(r+4)}$$

Γ (عدد صحيح سالب) $= \infty$

$$Y_3(x) = \lim_{n\to 3} \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

Ex: Prove that $J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$

$$J_{-k}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-k}}{r!\ \Gamma(r-k+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-k}}{r!\ \Gamma(r-k+1)} + \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-k}}{r!\ \Gamma(r-k+1)}$$

$\Gamma(r-k+1) = (r-k)!$

$r < k$

$= (\text{سالب})! = \infty$

$$= 0 + \sum_{r=k}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-k}}{r!\ \Gamma(r-k+1)}$$

$$= \sum_{r-k=0}$$

let $m = r-k \quad \rightarrow \quad r = m+k$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2k-k}}{(m+k)!\ \Gamma(m+k-k+1)}$$

$$J_{-k}(x) = (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{\Gamma(m+k+1)\; m!}$$

$$J_{-k}(x) = (-1)^k \, J_k(x) \quad *$$

Show that • $J_{0.5}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

$$J_{-0.5}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

من رأس المسألة نستنتج أن $J_{0.5}(x)$ تأخذ معظم خواص sin.

وأن $J_{-0.5}(x)$ تأخذ معظم خواص cos

من هذا نستنتج أنه بين كل صفرين لـ $J_{-0.5}(x)$ يوجد صفر لـ $J_{0.5}(x)$

والدالتين لهم تردد ويؤولا إلى صفر عند $x \to \infty$

$$J_{0.5} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\; \Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^0 \sqrt{x}}{\sqrt{2}\,(1)\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} + \frac{2^2 (-1)^1 \, x^2 \sqrt{x}}{2^2 \sqrt{2}\,(1)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} + \text{———}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \text{———} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{-0.5} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\frac{1}{2}}}{r!\; \Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^0 \sqrt{2}}{\sqrt{x}\,(1)\,\sqrt{\pi}} + \frac{(-1)^1 \left(x\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{2}\,(1)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} + \text{———}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \text{———} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

* Generating Function:

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

الدالة المولدة لدالة Bessel

معناها أنه يمكن استنتاج دالة Bessel من مفكوك الدالة الأسية

---

* Show That $\frac{d}{dx}\left(x^k J_k(x)\right) = x^k J_{k-1}(x)$

$$J_k = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k}}{r!\,\Gamma(k+r+1)}$$

$$x^k J_k = \sum \frac{(-1)^r x^{2r+2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+k}}{r!\,\Gamma(k+r+1)}$$

$$\frac{d(x^k J_k)}{dx} = \sum \frac{(-1)^r x^{2r+2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+k} (2r+2k)}{r!\,(k+r)!\,(\;\;k)}$$

$$= x^k \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k-1} (r+k)}{r!\,(k+r)!\,(\;\;)}$$

$$= x^k \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k-1} (r+k)}{r!\,(k+r)\,(k+r-1)!}$$

$$= x^k \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+(k-1)}}{r!\,\Gamma(k+(k-1)+1)}$$

$$= x^k J_{k-1}(x)$$

* نستخدم هذه الخاصية في مسائل التكامل لو كان اللي فوق x مساوي k براحه نخليهم تفاضل والتكامل يلغي التفاضل

Ex: Show that

$$\frac{d}{dx}(x^{-k} J_k) = -x^{-k} J_{k+1}$$

$$x^{-k} J_k = x^{-k} \sum \frac{(-1)^r \, x^{2r+k}}{2^{2r+k} \, r! \, \Gamma(k+r+1)}$$

$$= \sum \frac{(-1)^r \, x^{2r}}{2^{2r+k} \, r! \, \Gamma(r+k+1)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^{-k} J_k) = \sum \frac{(-1)^r (2r) \, x^{2r-1}}{2^{2r+k} \, r! \, \Gamma(r+k+1)}$$

$(r-1)!$

$m = r-1$

$$= \sum \frac{(-1)^m (-1)}{2^{2m+k+1}} \frac{x^{2m+1+k-k}}{m! \, \Gamma(m+(k+1)+1}$$

$$= -x^{-k} \sum \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+(k+1)}}{m! \, \Gamma(m+(k+1)+1}$$

$$= -x^{-k} J_{k+1}(x)$$